بنام دوست

۱. ثابت کنید برای هردو مجموعه A و B داریم $\mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B) \iff A \subseteq B$.
با استفاده از اصل جایگذاری، وجود مجموعه $\{\mathbb{P}(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ را (با داشتن مجموعه $\mathbb{N}$) ثابت کنید.

۴ نمره

۲. اگر $(A, \leq)$ خوشترتیب باشد و $f: A \to B$ پوشا باشد، بدون استفاده از اصل انتخاب، نشان دهید وارون راست $g: B \to A$ وجود دارد بقسمیکه $\forall x \in B: f(g(x)) = x$.

۴ نمره

۳. برای مجموعه A و زیرمجموعه $R_A = \{x \in A \mid x \notin x\}$ ثابت کنید $R_A \in \mathbb{P}(A) - A$. پس $\mathbb{P}(A) \not\subseteq A$.
ثابت کنید $A \subseteq \mathbb{P}(A)$ فقط و فقط وقتی برقرار است که A متعدی باشد (یعنی $\forall x, y: x \in y \in A \Rightarrow x \in A$).

۴ نمره

۴. با دانستن اینکه مجموعه $\mathbb{Q}$ شمارا است، نشان دهید مجموعه $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{Q}^3 \cup \cdots$ نیز شمارا میباشد.
همچنین نشان دهید مجموعه معادلات جبری با ضرایب گویا

$$\{r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots + r_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}\}$$

نیز شمارا است.

۴ نمره

۵. اگر $\mathcal{O}$ کلاس همه مجموعه های تک-عضوی باشد، برای زیر مجموعه

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}} = \{x \in \mathcal{O} \mid \exists y[x = \{y\} \ \& \ x \notin y]\}$$

نشان دهید $\{\mathcal{R}_{\mathcal{O}}\} \notin \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \iff \{\mathcal{R}_{\mathcal{O}}\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{O}}$.
از این تناقض نتیجه بگیرید که مجموعه همه مجموعه های تک-عضوی وجود ندارد.

۴ نمره

۶. اگر $(A, \prec_A), (B, \prec_B)$ خوشترتیب باشند و رابطه $\prec_{A\times B}$ روی حاصلضرب دکارتی $A \times B$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$\langle a, b\rangle \prec_{A\times B} \langle c, d\rangle \iff (a \prec_A c) \bigvee (a = c \ \& \ b \prec_B d)$$

نشان دهید $(A \times B, \prec_{A\times B})$ نیز خوشترتیب است.

۴ نمره

موفق و پیروز باشید!