

نام دوست

۱. (الف) تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را به استقراء تعریف کنید:

$$f(0) = 1$$

$$f(x+1) = 2 \cdot f(x)$$

نشان دهید برای هر $x, y \in \mathbb{N}$ داریم $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad (\text{ب}) \text{ به استقراء روی } n \text{ نشان دهید}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2 \quad \text{آیا میتوانید با استقراء روی } n \text{ نشان دهید که}$$

توجه کنید که تساوی فوق، نامساوی اخیر را نتیجه میدهد!

۲. (الف) ثابت کنید \times روی $+$ در دستگاه $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times)$ پخشپذیر است؛ یعنی $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

به چه خواصی از دستگاه $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \times)$ نیاز دارید؟

(ب) ثابت کنید \times روی $+$ در دستگاه $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \times)$ پخشپذیر است؛ یعنی $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

به چه خواصی از دستگاه $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times)$ نیاز دارید؟

۳. فرض کنید $\alpha = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله کوشی از اعداد گویا باشد.

(الف) قرار دهید $-\alpha := \{-r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ و ثابت کنید این نیز یک دنباله کوشی است. نشان دهید $[\alpha]_{\mathbb{R}} + [-\alpha]_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$.

(ب) فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $r_n > u > 0$ که $u \in \mathbb{Q}$.

تعریف کنید $\alpha^{-1} := \{\frac{1}{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ و ثابت کنید این نیز یک دنباله کوشی است. نشان دهید $[\alpha]_{\mathbb{R}} \cdot [\alpha^{-1}]_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$.

۴. عمل جمع و ضرب را در $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (با تعبیر $\langle x, y \rangle \leftrightarrow x + iy$) تعریف کرده و خاصیت پخشپذیری ضرب روی جمع را

در \mathbb{C} ثابت کنید. به چه خواصی از دستگاه $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \times)$ نیاز دارید؟

۵. عمل تفاضل متقارن دو مجموعه A و B عبارتست از $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

(الف) ثابت کنید Δ شرکت پذیر است، یعنی $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

(ب) توضیح دهید چگونه با استفاده از اصول زیرمجموعه، جفت سازی و اجتماع، وجود مجموعه $A \Delta B$ برای هر دو مجموعه A و B نتیجه میشود.

۶. برای مجموعه A میدانیم مجموعه $R_A = \{x \in A \mid x \notin x\}$ وجود دارد.

(الف) نشان دهید $A \notin R_A$. راهنمایی: اگر $A \in R_A$ آنگاه $A \notin A$ & $A \in A$ تناقض!

(ب) نشان دهید $R_A \notin R_A$. راهنمایی: اگر $R_A \in R_A$ آنگاه $R_A \notin R_A$ & $R_A \in R_A$ تناقض!

موفق و پیروز باشید!