

نام دوست

۱. نشان دهید برای $a, b \in \mathbb{R}$ با شرط $b \geq 0$ ، اعداد زیر ریشه های درجه دو (رادیکال) عدد مختلط $a + ib$ هستند:

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}} \right)$$

و برای $b \leq 0$ ، اعداد زیر ریشه های درجه دو (رادیکال) عدد مختلط $a + ib$ هستند:

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}} \right)$$

۴ نمره

۲. آیا تابع $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x \rightarrow 0$ حد دارد؟ جواب خود را ثابت کنید.

نشان دهید برای هر $\epsilon > 0$ تابع f در بازه $(0, \epsilon)$ هر مقدار حقیقی را میگیرد.

یعنی برای هر $a \in \mathbb{R}$ عدد x در بازه $(0, \epsilon)$ موجود است بطوریکه $f(x) = a$.

۴ نمره

۳. مشخص سازید تابع $g(x) = \tan|x|$ در کدام نقاط مشتقپذیر نیست. مشتق تابع را هم (در نقاط مشتقپذیر) محاسبه کنید.

مشخص کنید تابع فوق در کدام بازه ها صعودی و در کدام بازه ها نزولی است.

۴ نمره

۴. چندجمله ای تیلور درجه ۵ تابع $\tan x$ را حول نقطه $x = 0$ محاسبه کنید.

۴ نمره

۵. با فرض داشتن

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x), \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

انتگرال نامعین $\int x e^x \sin x dx$ را به روش جزء به جزء ($\int f g' = f g - \int f' g$) حساب کنید.

۴ نمره

۶. با بکار بردن قضیه مقدار میانگین مشتق $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ و قضیه مقدار میانگین انتگرال $f(d) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$

برای تابع $f(x) = x e^x$ ، نشان دهید اعداد $0 < c < 1$ و $0 < d < 1$ وجود دارند بطوریکه $e^d = \frac{1}{d}$ و $e^{c-1} = \frac{1}{c+1}$.

۴ نمره

موفق و پیروز باشید!