A Quick Introduction to Mathematical Logic

Saeed Salehi

Frontiers Summer School in Mathematics

Predicate Logic, 28 August 2021

کتاب
جبر و مقابله

خوارزمی و میراث علمی وی

کتاب جبر و مقابله نخستین اثر علمی بر جای مانده است از محمد بن موسی خوارزمی، ریاضیدان بزرگ ایرانی، در علم حساب و جبر و مقابله. کتابی که در آغاز قرن سوم هجری ـ حدود یکهزار و دویست سال پیش از این ـ به همت و ابتکار این ریاضیدان ایرانی تبار به زبان عربی تصنیف شد و به فرهنگ رو به گسترش اسلامی رونقی تازه بخشید. استقبال گرم و کم سابقه‌ای که در محافل علمی روزگار خوارزمی، و مآخذ قرنهای پس از وی، از این کتاب ریاضی به عمل آمد مهر تأییدی شد که بر نفاست کتاب و کفایت نویسنده‌اش نقش بست و زمینهٔ نیکنامی و جاودانگی نویسنده و نوشتهٔ او را در سراسر گیتی فراهم ساخت.

خوارزمی کار نگارش این اثر ماندنی خویش را در سال ۲۱۵ هجری به پایان رسانیده است. اثری که پس از انتشار در قلمرو جهان اسلام پیوسته استادان را مفید بود و دانشجویان را کلید.

کتاب جبر خوارزمی در سال ۵۴۰ هجری (۱۱۴۵ میلادی) به همت رابرت چستری به لاتین ترجمه شد و این ترجمه را می‌توان آغاز رواج علم جبر در اروپا دانست و از آنجا به سراسر گیتی

کتاب

جبر و مقابله

نوشتهٔ

محمدبن موسی خوارزمی

ترجمهٔ

حسین خدیوجم

انتشارات اطلاعات

۱۳۶۳

می‌کنی، می‌شود: شش درهم، و حاصل آن یك مال و یك جذر است که برابر است با شش درهم. آنگاه جذر را پس از نصف کردن، درمانند خودش ضرب کن، می‌شود: یك چهارم، آن را بر شش بیفزا، و جذر حاصل جمع را بگیر، و نصف جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی ــ وعبارت است از نصف ــ از آن کم کن، باقیمانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که دراین مسئله دومرد است.

۲۹ــ اگر کسی بگوید: مالی است که چون آن را در دوسومش ضرب کنی پنج[1] می‌شود.

راه حل آن چنین است: اگر آنرا در مانند خودش ضرب کنی هفت و نیم می‌شود، پس می‌گویی: آن‌مال‌جذرهفت ونیم‌است که باید در دوسوم جذر هفت‌و نیم‌ضرب شود، آنگاه دوسوم‌را دردوسوم ضرب می‌کنی می‌شود چهار نهم، و چهارنهم‌ضرب درهفت‌ونیم می‌شودسه‌و یك سوم، پس‌جذر سه ویك‌سوم‌عبارت‌است از دوسوم جذر هفت ونیم، آنگاه سه و یك سوم را درهفت و نیم ضرب می‌کنی می‌شود بیست و پنج، جذر آن را می‌گیری پنج می‌شود.

۳۰ــ اگر کسی بگوید: مالی است که چون درسه جذر خودش ضرب شود پنج برابر مال اول می‌شود.

راه حل آن چنین‌است: چنان است که گفته باشد مالی را درجذرش ضرب کردم به اندازهٔ یك مال و دوسوم مال اول شد، پس مقدار جذر این مال یك درهم ودوسوم‌درهم است، و اصل مال دودرهم وهفت نهم درهم خواهد بود.

۳۱ــ اگر کسی بگوید: مالی است که چون یك سوم آن را کم

۱) خوارزمی این مسئله را با اندکی تفصیل تکرار کرده‌است. یعنی شکل دیگری از مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ است.

کنی وباقیمانده را درسه جذر آن مال ضرب کنی مقدار مال اول بدست می‌آید.

راه حل آن چنین است: اگر تمام مال اول را، پیش از کسر یك‌سوم، درسه‌عدد جذرخودش ضرب کنی‌می‌شود یك مال ونیم؛ زیرا دو سوم آن ضرب در سه جذر خودش می‌شود یك مال، پس تمام آن ضرب در سه جذرش می‌شود یك مال ونیم، و چون تمام آنرا در یك جذر ضرب کنی می‌شود نصف مال، بنابراین جذر این مال نصف است واصل آن یك چهارم است، پس دو سوم مال برابر است با یك ششم، وسه جذر مال یك درهم ونیم است، بنابراین هنگامی که یك‌ششم را در یك‌ونیم‌ضرب کنی‌یك‌چهارم‌به‌دست می‌آید و آن مقدارمال‌است.

۳۲ ـ اگر کسی بگوید: مالی است که چون چهار جذر آن را کنار بگذاری وسپس یك سوم باقیمانده را برداری، این یك‌سوم برابر است باچهار جذر مال.

راه حل آن چنین است: می‌دانی که یك سوم باقیمانده برابر است با چهار جذر مال، پس تمام باقیمانده برابر است با دوازده جذر آن. و چون چهار جذری را که کنار گذاشتی بر آن بیفزایی می‌شود: شانزده‌جذر، و این تعدادجذر های‌مال است، و مقدار این‌مال‌دویست‌و پنجاه‌وشش‌است.

۳۳ ـ اگر کسی بگوید: مالی است که چون یك جذر آنرا کنار بگذاری وجذر باقیمانده را برجذر آن بیفزایی دو درهم می‌شود[1].

راه حل آن چنین است: این معادله بدین صورت در می‌آید: جذر مال، بەاضافهٔ جذر مال، منهای یك جذر برابر است بادو درهم، آنگاه‌یك‌جذر مال از آن ویك جذر مال از دو درهم کم می‌کنی، معادله

۱) $x+\sqrt{x^2-x}=2$ بنابراین $x^2-x=(2-x)^2$ تا آخر

ROBERT OF CHESTER'S

LATIN TRANSLATION

OF THE

ALGEBRA OF AL-KHOWARIZMI

WITH AN INTRODUCTION, CRITICAL NOTES AND AN ENGLISH VERSION

BY

LOUIS CHARLES KARPINSKI
UNIVERSITY OF MICHIGAN

Muhammad ibn Mūsa, al-Khowarazmi

New York
THE MACMILLAN COMPANY
LONDON: MACMILLAN AND COMPANY LIMITED
1915

equal to 6 units. I take one-half of the roots and I multiply the half by itself. I add the product to 6, and of this sum I take the root. The remainder obtained after subtracting one-half of the roots will designate the first number of girls, and this is two.

Fifteenth Problem

If from a square I subtract four of its roots and then take one-third of the remainder, finding this equal to four of the roots, the square will be 256.[1]

Explanation. Since one-third of the remainder is equal to four roots, you know that the remainder itself will equal 12 roots. Therefore add this to the four, giving 16 roots. This (16) is the root of the square.

Sixteenth Problem

From a square I subtract three of its roots and multiply the remainder by itself; the sum total of this multiplication equals the square.[2]

Explanation. It is evident that the remainder is equal to the root, which amounts to four. The square is 16.

These now are the sixteen problems which are seen to arise from the former ones, as we have explained. Hence by means of those things which have been set forth you will easily carry through any multiplication that you may wish to attempt in accordance with the art of restoration and opposition.

CHAPTER ON MERCANTILE TRANSACTIONS[3]

Mercantile transactions and all things pertaining thereto involve two ideas and four numbers.[4] Of these numbers the first is called by the Arabs Almuzahar and is the first one proposed. The second is called Alszian, and recognized as second by means of the first. The third, Almahen, is unknown. The fourth, Alchemon, is obtained by means of the first and second. Further, these four numbers are so related that the first of them, the measure, is inversely proportional to the last, which is cost. Moreover, three of these numbers are always given or known and the fourth is unknown, and this

[1] Rosen, p. 66; Libri, p. 296. $\frac{1}{3}(x^2 - 4x) = 4x$.
In the Arabic text these two problems precede: $x^2 \cdot 3x = 5x^2$ and $(x^2 - \frac{1}{3}x^2) \cdot 3x = x^2$.

[2] Rosen, p. 67; Libri, p. 296. $(x^2 - 3x)^2 = x^2$, whence $x^2 - 3x = x$.
The problem, $x + \sqrt{x^2 - x} = 2$, precedes. This is one of two problems given in the German excerpt of 1461 from the algebra of Al-Khowarizmi (Gerhardt, *Monatsberichte d. Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1870, pp. 142–143).

[3] The famous 'rule of three' is the subject of discussion in this chapter.

[4] The two ideas appear to be the notions of quantity and cost; the four numbers represent unit of measure and price per unit, quantity desired and cost of the same. These four technical terms are *al-musa''ir*, *al-si'r*, *al-thaman*, and *al-muthamman*, and further *al-maqdi*; see p. 44.

Coding Mathematics

Example from Al-Khwarizmi: If from a square, I subtract four of its roots and then take one-third of the remainder, finding this equal to four of the roots, the square will be 256.

Modern Notation: If I have $\frac{1}{3}(x^2 - 4x) = 4x$, then $x^2 = 256$.

More Modern: $\forall x[\frac{1}{3}(x^2 - 4x) = 4x \longrightarrow x^2 = 256]$.

This holds in the domain $\mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ (but not in $\mathbb{N}$).

Indeed, $\mathbb{N} \models \forall x[\frac{1}{3}(x^2 - 4x) = 4x \longrightarrow x = 16 \vee x = 0]$.

First–Order Logic (Syntax)

Fix a set of primitive constant, function, or relation symbols.
For example, constants 0, 1; the functions $-, +, \cdot$; the relation $<$.

Terms are constructed from variables and constants by successive application of function symbols.

Examples: $0 + x$, $1 \cdot (x + y)$, $(x \cdot x) + y$, algebraic expressions.

Atomic Formulas are relations (including $=$) between terms.

Examples: $t = u$ or $t < u$ or $t \leqslant u$.

Formulas are either atomic or the negation $(\neg)$, disjunction $(\vee)$, conjunction $(\wedge)$, implication $(\rightarrow)$ or quantification $(\forall, \exists)$ of other formulas.

Examples: $\forall x \exists y[x = 2y \vee x = 2y + 1]$, $\exists x \forall y[x + y = y]$,
$\forall x[x + u < x]$, $\forall y[y \cdot u = u]$, $\forall z[z \cdot u < z]$, $\exists z[z + x = y]$.

Structures

A non-empty set with some functions (maybe also constants) and relations. $\mathbb{A} = \langle \mathscr{A}; \mathfrak{f}_1^{\mathbb{A}}, \cdots, \mathfrak{f}_m^{\mathbb{A}}, \mathfrak{r}_1^{\mathbb{A}}, \cdots, \mathfrak{r}_n^{\mathbb{A}} \rangle$.

– if $\mathfrak{f}_i$ is a constant, then $\mathfrak{f}_i^{\mathbb{A}} \in \mathscr{A}$;
– if $\mathfrak{f}_j$ is of arity $k(>0)$, then $\mathfrak{f}_j^{\mathbb{A}} : \mathscr{A}^k \to \mathscr{A}$.
– if $\mathfrak{r}_\ell$ is of arity $k(>0)$, then $\mathfrak{r}_\ell^{\mathbb{A}} \subseteq \mathscr{A}^k$.

Example

- Ordered Groups: $\langle G; *, \mathbf{e}, \imath', \leqslant \rangle$ — $\langle G; \mathbf{e}^{\mathbb{G}}, \imath'^{\mathbb{G}}, *^{\mathbb{G}}, \leqslant^{\mathbb{G}} \rangle$
  $\forall x, y, z(x \leqslant y \longrightarrow x * z \leqslant y * z \wedge z * x \leqslant z * y)$
- Fields: $\langle \mathbb{Q}; 0, 1, -, +, \cdot, \imath' \rangle$
  $\imath'(0) = 0 \quad \forall x(x \neq 0 \to x \cdot \imath'(x) = 1) \quad x \cdot 0 = 0 \neq 1 \neq 0 \cdot \imath'(0)$

MODEL THEORY

Satisfaction in Structures

Question: Is $\exists x(3x+1=2y)$ true in $\mathbb{N}$? ($\langle\mathbb{N};0,1,+,\cdot,<\rangle$)
Answer: It depends on y:
for e.g. $y=1$ it is false! but for e.g. $y=2$ it is true.

Also, $\langle\mathbb{N};0,1,+,\cdot,<\rangle \not\models \forall y\exists x(3x+1=2y)$;
but $\langle\mathbb{N};0,1,+,\cdot,<\rangle \models \exists y\exists x(3x+1=2y)$.

Examples:

- $\mathbb{N} \not\models \forall x\exists y(x+y=0)$ but $\mathbb{Z} \models \forall x\exists y(x+y=0)$.
- $\mathbb{Z} \not\models \forall x\exists y(x\neq 0\rightarrow[x\cdot y=1])$ but $\mathbb{Q} \models \forall x\exists y(x\neq 0\rightarrow[x\cdot y=1])$.
- $\mathbb{Q} \not\models \forall x\exists y(0\leqslant x\rightarrow[y\cdot y=x])$ but $\mathbb{R} \models \forall x\exists y(0\leqslant x\rightarrow[y\cdot y=x])$.
- $\mathbb{R} \not\models \forall x\exists y(y\cdot y+x=0)$ but $\mathbb{C} \models \forall x\exists y(y\cdot y+x=0)$.

Axiomatizing (Propositional and) Predicate Logic

Theorem (Gödel's Completeness Theorem 1929)

From An Axiomatization of (Logically) Valid Formulas:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$
- $\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$
- $\varphi \to \forall x\varphi$ *[x is not free in φ]*
- $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

With the Modus Ponens Rule:

- $$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

All Universally Valid Formulas CAN BE PROVED/GENERATED. ■

PROOF THEORY

(Soundness and) Strong Completeness

Semantic	Definition
$\mathbb{A} \vDash \varphi(\bar{x})$	depends on values of free $\bar{x}$
$\mathbb{A} \vDash \psi$	definite; when ψ is a sentence
$\mathbb{A} \vDash \Sigma$	$\mathbb{A} \vDash \psi$ for every $\psi \in \Sigma$
$\Sigma \vDash \psi$	$\mathbb{A} \vDash \psi$ for every $\mathbb{A} \vDash \Sigma$
Syntactic	**Definition**
$\Sigma \vdash \psi$	ψ is proved from Σ

Soundness If $\Sigma \vdash \psi$, then $\Sigma \vDash \psi$.

Completeness If $\Sigma \vDash \psi$, then $\Sigma \vdash \psi$.

A Consequence of the Completeness

Definition (Computably Enumerable Set)

Set A is computably enumerable where there is an (input-free) algorithm $\mathcal{P}$ lists all members of A; i.e., $A = \texttt{output}(\mathcal{P})$. ◇

$$\boxed{\text{Algorithm}} \xrightarrow{\texttt{output}:} \{a_0, a_1, a_2, \cdots\} = A$$

Algorithm: input–free, outputs a set.

input–free such as *operating system*

Tautologies ($\equiv$ Theorems) of the Predicate Logic is COMPUTABLY ENUMERABLE (GÖDEL 1929).